

ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Δ' ΤΑΞΗΣ  
 ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ  
 ΤΕΤΑΡΤΗ 30 ΜΑΪΟΥ 2007  
 ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ  
 ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ:  
 ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ  
 ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

**ΘΕΜΑ 1ο**

**A. 1.** Έστω η συνάρτηση  $f(x) = x^v$ ,  $v \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$ .

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  και ισχύει  $f'(x) = v \cdot x^{v-1}$ .

**Μονάδες 10**

**2.** Να ορίσετε πότε μια συνάρτηση  $f$  λέγεται γνησίως αύξουσα σ' ένα διάστημα  $\Delta$  του πεδίου ορισμού της.

**Μονάδες 5**

**B.** Για καθεμιά από τις επόμενες προτάσεις να γράψετε στο τετράδιό σας τον αριθμό της και ακριβώς δίπλα την ένδειξη  $\Sigma$ , αν η πρόταση είναι **Σωστή**, ή  $\Lambda$ , αν αυτή είναι **Λανθασμένη**.

**1.** Για κάθε μιγαδικό  $z$  ισχύει  $|z| = z \cdot \bar{z}$ .

**Μονάδες 2**

**2.** Μια συνάρτηση  $f$  είναι 1-1, αν και μόνο αν κάθε οριζόντια ευθεία (παράλληλη στον  $xx'$ ) τέμνει τη γραφική παράστασή της το πολύ σε ένα σημείο.

**Μονάδες 2**

**3.** Αν υπάρχει το όριο της συνάρτησης  $f$  στο  $x_0 \in \mathbb{R}$  και  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) < 0$ , τότε  $f(x) < 0$  κοντά στο  $x_0$ .

**Μονάδες 2**

4. Αν  $f$  είναι συνεχής συνάρτηση στο  $[\alpha, \beta]$ , τότε η  $f$  παίρνει στο  $[\alpha, \beta]$  μια μέγιστη τιμή  $M$  και μια ελάχιστη τιμή  $m$ .

**Μονάδες 2**

5. Έστω η συνάρτηση  $f(x) = \eta \mu x$  με πεδίο ορισμού το  $\mathbb{R}$ , τότε  $f'(x) = -\sigma \nu x$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

**Μονάδες 2**

### ΘΕΜΑ 2ο

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς  $z = (\lambda - 2) + 2\lambda i$ , όπου  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

- α. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών  $z$ .

**Μονάδες 9**

- β. Αν ισχύει  $z + \bar{z} = 2$ , να βρείτε το  $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{z}\right)$ .

**Μονάδες 7**

- γ. Αν  $|z| = 2$  και  $\operatorname{Im}(z) \neq 0$ , να βρείτε το  $\lambda$ .

**Μονάδες 9**

### ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{4}{x}$ , με  $x > 0$ .

- α. Να βρείτε τα όρια

$$\text{i) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{f(x)} \qquad \text{ii) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x f(x)}{(x-2)^2}$$

**Μονάδες 8**

- β. Να βρείτε το σημείο  $M$  της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f$  που απέχει από το σημείο  $O(0,0)$  τη μικρότερη απόσταση.

**Μονάδες 9**

- γ. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f$ , στο οποίο η εφαπτομένη είναι παράλληλη προς την ευθεία  $y=-2x+6$ .

**Μονάδες 8**

#### ΘΕΜΑ 4ο

Έστω μια συνάρτηση  $f$ , η οποία είναι συνεχής στο  $\mathbb{R}$ . Αν για κάθε  $x \neq 0$  ισχύει  $xf(x)=x+2\eta\mu x$ , τότε:

- α. Να βρείτε το  $f(0)$ .

**Μονάδες 7**

- β. Να αποδείξετε ότι  $f(x)<3$  για κάθε  $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ .

**Μονάδες 10**

- γ. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $f(x)=2$  έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο  $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ .

**Μονάδες 8**

#### ΟΔΗΓΙΕΣ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟΥΣ

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). Δεν θα αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Δεν επιτρέπεται να γράψετε οποιαδήποτε άλλη σημείωση.  
Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα.

4. Κάθε λύση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: Τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: Μία (1) ώρα μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.

**ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**

**ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**