ΓΕΝΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2001
ΤΕΤΑΡΤΗ 23 ΜΑΪΟΥ 2001
ΔΕΣΜΗ ΤΕΤΑΡΤΗ (4η)
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ : ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ : ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΖΗΤΗΜΑ 1ο

Α. Να αποδείξετε ότι, αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα [α, β] και $f(\alpha)\neq f(\beta)$, τότε για κάθε αριθμό ξ μεταξύ των f(α) και f(β) υπάρχει τουλάχιστον ένας $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιος ώστε να ισχύει $f(x_0)=\xi$.

Β. Να αποδείξετε ότι:

α. Η συνάρτηση $f(x)=x^3+2x-1-\eta\mu 2x$, $x\in R$, είναι γνησίως αύξουσα.

β. Η εξίσωση $x^3+2x-1=\eta\mu 2x$ έχει μία μόνο ρίζα στο διάστημα (0,1).

ΖΗΤΗΜΑ 2ο

Α. Δίνεται το σύστημα

$$\begin{cases} 5x+5y=\lambda\omega \\ 2x+y=2\omega \\ x+3y=3\omega \end{cases} \quad ,\lambda\in R$$

α. Να βρείτε την τιμή του λ για την οποία το σύστημα έχει δύο τουλάχιστον διαφορετικές λύσεις.

β. Αν (x_1, y_1, ω_1) και (x_2, y_2, ω_2) είναι δύο διαφορετικές λύσεις του συστήματος, να αποδείξετε ότι

$$x_1 x_2 + y_1 y_2 = \omega_1 \omega_2$$

Β. Θεωρούμε στο καρτεσιανό επίπεδο Oxy τη γραμμή με εξίσωση

$$x^2 + y^2 + 6x - 8y = 0$$

α. Να αποδείξετε ότι η προηγούμενη εξίσωση παριστάνει κύκλο και να προσδιορίσετε το κέντρο και την ακτίνα του.

β. Να αποδείξετε ότι τα σημεία Ο (0,0) και Α(-6, 8) είναι τα άκρα μιας διαμέτρου του κύκλου.

ΖΗΤΗΜΑ 3ο

Α. Η συνάρτηση $f : R \to R$ έχει συνεχή παράγωγο και ικανοποιεί την ισότητα

$$\int_{\alpha}^{\beta} f'(x)\, e^{f(x)}\, dx = 0,$$

όπου $\alpha, \beta \in R$ με $\alpha < \beta$.

Να αποδείξετε ότι:

α. $f(\alpha) = f(\beta)$

β. Η εξίσωση $f'(x)=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (α, β).

Β. Έστω η συνάρτηση

$$f(x) = 2x + \frac{4}{x}, \qquad x>0$$

α. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν Ε(λ) του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f, τον άξονα x΄x και τις ευθείες x=λ, x=λ+1, όπου λ>0, είναι

$$E(\lambda) = 2\lambda+1+ 4\ell n\left(1+\frac{1}{\lambda}\right)$$

β. Να προσδιορίσετε την τιμή του λ για την οποία το εμβαδόν E(λ) γίνεται ελάχιστο.

ΖΗΤΗΜΑ 4ο

Α. Δίνεται η συνάρτηση

$$g(x) = \int_0^x x\,\sigma\upsilon\nu t\,dt \quad , \; x \in R$$

α. Να αποδείξετε ότι

$$g''(x) = 2\sigma\upsilon\nu x - x\eta\mu x \;\; , \;\; x \in R.$$

β. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g στο σημείο $A\left(\frac{\pi}{2}, g\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$.

Β. Έστω η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{\alpha x^2+\beta x}{x-2}\, , \quad x \in R-\{2\}$$

όπου α, β ∈R.

α. Αν η ευθεία ε : y= 2x - 1 είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο +∞, ποιες είναι οι τιμές των α, β;

β. Έστω Ω = $\left\{\frac{\alpha}{2},\ \alpha,\ \beta,\ 2\beta\right\}$ είναι ένας δειγματικός χώρος με ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα, όπου οι α, β έχουν τις τιμές που προκύπτουν στο προηγούμενο ερώτημα.

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$g(x) = \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{3}(\lambda - 1)x^3 + 2x^2 + 2001, x \in R, \lambda \in \Omega$$

και το ενδεχόμενο

$$E = \{\lambda \in \Omega / \text{η συνάρτηση } g \text{ είναι κυρτή στο } R\}$$

Να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου Ε.

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους υποψηφίους)

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, δέσμη, εξεταζόμενο μάθημα). Τα θέματα να μην τα αντιγράψετε στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Δεν επιτρέπεται να γράψετε καμιά άλλη σημείωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε τα φωτοαντίγραφα μαζί με το τετράδιο.
3. Να απαντήσετε σε όλα τα ζητήματα.
4. Κάθε λύση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης : τρεις (3) ώρες.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης : μία (1) ώρα μετά την έναρξη της εξέτασης.

ΑΠΟ ΤΗΝ ΚΕΓΕ
ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ