

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Δ' ΤΑΞΗΣ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΤΕΤΑΡΤΗ 7 ΙΟΥΛΙΟΥ 2004
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ
ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ 1ο

A. Αν $z_1 = \alpha + \beta i$ και $z_2 = \gamma + \delta i$, όπου $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$, είναι μιγαδικοί αριθμοί, να αποδείξετε ότι:

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$$

Μονάδες 10

Για καθεμιά από τις επόμενες προτάσεις **B**, **Γ**, **Δ**, **E** και **ΣΤ**, να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα της και, ακριβώς δίπλα, την ένδειξη (**Σ**), αν η πρόταση είναι σωστή ή (**Λ**), αν αυτή είναι λανθασμένη.

B. Αν $M_1(\alpha, \beta)$ και $M_2(\gamma, \delta)$ είναι οι εικόνες των $\alpha + \beta i$ και $\gamma + \delta i$ αντιστοίχως στο μιγαδικό επίπεδο, τότε η διανυσματική ακτίνα της διαφοράς των μιγαδικών $\alpha + \beta i$ και $\gamma + \delta i$ είναι η διαφορά των διανυσματικών ακτίνων τους.

Μονάδες 3

Γ. Για κάθε μιγαδικό αριθμό $z = \alpha + \beta i$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ισχύει

$$\overline{\bar{z}} = -\alpha + \beta i.$$

Μονάδες 3

Δ. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \sin x$, όπου $x \in \mathbb{R}$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη και ισχύει $f'(x) = -\eta \mu x$.

Μονάδες 3

Ε. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Αν

- η f είναι συνεχής στο Δ και
- $f'(x) = 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ ,
τότε η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ .

Μονάδες 3

ΣΤ. Έστω μία συνάρτηση f , η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ . Αν $f'(x) < 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ .

Μονάδες 3

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \sqrt{4x^2 + 1} + 2x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

α) Να αποδείξετε ότι :

i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 1}{x} = 2$,

Μονάδες 10

ii) $f'(0) = 2f(0)$.

Μονάδες 5

β) Να υπολογίσετε το: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\alpha x^2 + \beta x + 3}{x - 2}$, $x \in \mathbb{R} - \{2\}$, όπου

α, β σταθεροί πραγματικοί αριθμοί. Η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f διέρχεται από το σημείο $A(1, -4)$ και ισχύει η σχέση $f(3) + 3f(1) = 0$.

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha = 1$ και $\beta = 0$.

Μονάδες 9

β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $A(1, -4)$.

Μονάδες 8

γ) Να αποδείξετε ότι η ευθεία $y = x + 2$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο $+\infty$.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ 4ο

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς $z = x + yi$, όπου x, y πραγματικοί αριθμοί, για τους οποίους υπάρχει $k \in \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει:

$$x = 3 - k \quad \text{και} \quad y = 2k + 1.$$

Να αποδείξετε ότι:

α) αν $3 \operatorname{Re}(z) + 4 \operatorname{Im}(z) = 3$, τότε $k = -2$.

Μονάδες 9

β) αν $|z - 1| = \sqrt{5}$, τότε $|z| = \sqrt{10}$.

Μονάδες 10

γ) οι εικόνες M των μιγαδικών αυτών αριθμών z στο μιγαδικό επίπεδο ανήκουν σε ευθεία, της οποίας να βρείτε την εξίσωση.

Μονάδες 6

ΟΔΗΓΙΕΣ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟΥΣ

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). Τα θέματα δεν θα τα αντιγράψετε στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν.

Δεν επιτρέπεται να γράψετε οποιαδήποτε άλλη σημείωση.

Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.

3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα.
4. Κάθε λύση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: μία (1) ώρα μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ