

ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Δ' ΤΑΞΗΣ
ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΤΡΙΤΗ 26 ΜΑΪΟΥ 2009
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ
ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ 1ο

A. 1. Πότε η ευθεία $x = x_0$ λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f ;

Μονάδες 5

2. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 , να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f+g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει:

$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$

Μονάδες 8

B. Για καθεμιά από τις επόμενες προτάσεις να γράψετε στο τετράδιό σας τον αριθμό της και ακριβώς δίπλα την ένδειξη **Σ**, αν η πρόταση είναι **Σωστή**, ή **Λ**, αν αυτή είναι **Λανθασμένη**.

1. $|z|^2 = z^2$, για κάθε μιγαδικό αριθμό z .

Μονάδες 3

2. Η εικόνα του μιγαδικού αριθμού $\alpha + \beta i$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ στο μιγαδικό επίπεδο είναι το σημείο $M(\alpha, \beta)$.

Μονάδες 3

3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta \mu x}{x} = 0$.

Μονάδες 3

4. Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[α,β]$ και παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα $(α,β)$, τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $ξ ∈ (α,β)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(ξ) = \frac{f(β) - f(α)}{β - α}.$$

Μονάδες 3

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί

$$z_1 = 2 + 3i \quad \text{και} \quad z_2 = (1 - i)^2 + 3i^{2009} + 1.$$

- α. Να αποδείξετε ότι $z_2 = 1 + i$.

Μονάδες 8

- β. Να βρείτε το μέτρο του μιγαδικού αριθμού $\bar{z}_1 - z_2$.

Μονάδες 7

- γ. Να εκφράσετε το πηλίκο $\frac{z_1}{z_2}$ στη μορφή $κ + λi$, όπου

$$κ, λ ∈ ℝ.$$

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} αx^2 + β, & x ≤ 1 \\ 2x + 3, & x > 1 \end{cases}$ με $α, β ∈ ℝ$.

- α. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$, να αποδείξετε ότι $α + β = 5$.

Μονάδες 5

- β.** Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$, να αποδείξετε ότι $\alpha=1$ και $\beta=4$.

Μονάδες 10

- γ.** Για $\alpha=1$ και $\beta=4$, να προσδιορίσετε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $g(x)=\frac{f(x)}{x}$, $x \neq 0$, στο $-\infty$ και στο $+\infty$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 4ο

Για $\lambda \in \mathbb{R}$ δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = x^3 + \lambda x^2 - 3x + 1, \quad x \in \mathbb{R}.$$

- I.** Αν η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x_0=1$, να βρείτε την τιμή του λ .

Μονάδες 4

II. Για $\lambda = 0$

- α.** να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Μονάδες 8

- β.** να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της γραφικής παράστασης της f που είναι παράλληλες προς την ευθεία $y=9x$.

Μονάδες 8

- γ.** να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) - \sqrt{x} = 0$ έχει μία τουλάχιστον λύση στο ανοικτό διάστημα $(0,1)$.

Μονάδες 5

ΟΔΗΓΙΕΣ ΠΡΟΣ ΤΟΥΣ ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟΥΣ

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Δεν επιτρέπεται να γράψετε** οποιαδήποτε άλλη σημείωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα.
4. Να γράψετε τις απαντήσεις σας μόνο με μπλε ή μόνο με μαύρο στυλό.
5. Κάθε απάντηση τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
6. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
7. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: μία (1) ώρα μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**